Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 1 — Musterlösung

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge $A_n \subset \mathbb{N}$ durch

$$A_n := \{q \in \mathbb{N} \ : \ q \text{ ist ein Teiler von } n\}.$$

Aufgabe 1: *(1+1+1+1+1 Punkte)* Bestimme die Mengen

(a) A_{18}

(b) A_{33}

(c) $A_{18} \cap A_{33}$

(d) $(A_{200} \cap A_{160} \cap A_{64}) \cup A_{18}$.

Wie sieht A_p für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ aus?

Lösung. Es gilt

$$A_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, \qquad A_{33} = \{1, 3, 11, 33\}, \qquad A_{18} \cap A_{33} = \{1, 3\}.$$

Außerdem ist

$$A_{64} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\},$$

wobei $1, 2, 4, 8$ sowohl 160 als auch 200 teilen, während 16 und 32 keine Teiler von 200 sind und 64 weder 160 noch 200 teilt. Wir finden

$$A_{200} \cap A_{160} \cap A_{64} = \{1, 2, 4, 8\} \quad \Longrightarrow \quad (A_{200} \cap A_{160} \cap A_{64}) \cup A_{18} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 18\}.$$

Falls p prim ist, dann teilen nur p und 1 die Zahl p, also folgt $A_p = \{1, p\}$. ■

Aufgabe 2: *(1+1+1+1+1 Punkte)*
Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Gib hierzu jeweils eine kurze Begründung an.

(a) $-2 \in \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x^2 < 2\}$

(b) $(6 \in A_{39} \cap A_{72}) \ \vee \ (7 \in A_5 \cup A_{62})$

(c) $6 \in \{n \in \mathbb{Z} \ : \ n^2 - 6n - 5 \geq 0\}$

(d) $\{x \in \mathbb{N} \ : \ 3x + 1 < 9\} = \{1, 2, 3\}$

(e) $\{n \in \mathbb{N} \ : \ n^2 - 14n + 45 \geq 0\} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq 5\} \cup \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq 9\}$

Lösung. Es gilt $(-2)^2 = 4 \geq 2$, also ist Aussage (a) falsch.

Die Aussage $(6 \in A_{39} \cap A_{72})$ ist falsch, da 6 kein Teiler von 39 ist und die Aussage $(7 \in A_5 \cup A_{62})$ ist ebenfalls falsch, also ist Aussage (b) falsch.

Es gilt $6^2 - 6 \cdot 6 - 5 = -5 < 0$, also ist Aussage (c) falsch.

Wir berechnen $3 \cdot 3 + 1 = 10 > 9$, also ist 3 kein Element der Menge $\{x \in \mathbb{N} \ : \ 3x + 1 < 9\}$ und auch Aussage (d) ist falsch.

Nun berechnen wir mittels quadratischer Ergänzung, dass

$$n^2 - 14n + 45 = n^2 - 2 \cdot 7n + 49 - 4 = (n-7)^2 - 4$$

und erhalten

$$n^2 - 14n + 45 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (n-7)^2 \geq 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (n - 7 \geq 2) \ \vee \ (n - 7 \leq -2).$$

Dies ist weiterhin äquivalent zu $n \geq 9$ oder $n \leq 5$, also ist Aussage (e) wahr. ■